

Phenomenon of Backflow

Iwo Bialynicki-Birula

Center for Theoretical Physics Warsaw Poland

Workshop on Geometrical Methods in Physics

June 20 2022



Bogdan Mielnik: In memoriam



Explicit Solution of the Continuous Baker-Campbell-Hausdorff Problem and a New Expression for the Phase Operator

I. BIALYNICKI-BIRULA, B. MIELNIK, AND J. PLEBAŃSKI

Institute of Theoretical Physics, Warsaw University, Warsaw, Poland

An explicit formula for an arbitrary function of the evolution operator is derived. With its use, the continuous analog of the Baker-Campbell-Hausdorff problem is solved. The application of this result to the quantum theory of scattering leads to a new closed expression for the phase shifts in every order of perturbation theory.

I. INTRODUCTION

In many branches of physics and mathematics we are led to study the evolution equation

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, t_0) = A(t) E(t, t_0). \quad (1.1)$$

The purpose of this paper is the derivation of a new representation for an arbitrary function of E , the evolution operator.¹ Using this representation for the function $\Omega = \ln E$, we obtain the solution of the continuous analog of the Baker-Campbell-Hausdorff problem (1), (2) in a closed form.

Backflow in relativistic wave equations

Iwo Białynicki-Birula^{1,*}, **Zofia Białynicka-Birula²**
and **Szymon Augustynowicz³**

¹ Center for Theoretical Physics, Polish Academy of Sciences, Aleja Lotników 32/46, 02-668 Warsaw, Poland

² Polish Academy of Sciences, Institute of Physics, Aleja Lotników 32/46, 02-668 Warsaw, Poland

³ Faculty of Physics, University of Warsaw, Pasteura 5, 02-093 Warsaw, Poland

E-mail: birula@cft.edu.pl

Received 4 January 2022, revised 22 March 2022

Accepted for publication 8 April 2022



**Backflow was found in some special solutions
of nonrelativistic quantum mechanics
almost 30 years ago**

**In many papers where this effect was studied
backflow was described as
“intriguing quantum-mechanical phenomenon,
clearly nonclassical effect, peculiar quantum effect”
and many other similar statements
Many papers even use the term “quantum backflow”**

**In my talk I will show that backflow
is the property of waves and it does not matter
whether these waves are quantum or classical**

In general terms the phenomenon of backflow is the counterintuitive behavior of the flow of some quantity (energy, probability, etc.)

Namely, in some regions of space the direction of the flow is **opposite** as compared with the direction of all its constituent elementary waves

In quantum wave mechanics studied before the quantity exhibiting the backflow is the probability density whose flow is determined by the probability current
The constituent elementary waves in this case are the plane waves appearing in the Fourier decomposition of the wave function

I will underscore in this talk the universality of the backflow by using three examples of beams that exhibit the phenomenon of the backflow

**The concrete examples are:
a superposition of two monochromatic plane waves
in Maxwell theory and in the Dirac theory
and the hopfion solution of Maxwell equations
In all these examples I will not pay any attention
to the overall value of the wave amplitude
because the analysis of the backflow relies only
on the direction of the flow: forward vs. backward**

I will now try to convince you that backflow is a wave phenomenon not a quantum effect

I will present a solution of Maxwell equations which exhibits backflow in full glory

In the study of backflow in Maxwell theory

**I will use a very convenient tool:
the Riemann-Silberstein (RS) vector $F(\mathbf{r}, t)$
which significantly simplifies the calculations**

$$F(\mathbf{r}, t) = \frac{D(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{2\epsilon_0}} + i \frac{B(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{2\mu_0}}$$

In terms of $F(\mathbf{r}, t)$ Maxwell equations are ($c = 1$)

$$i\partial_t F(\mathbf{r}, t) = \nabla \times F(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \cdot F(\mathbf{r}, t) = 0$$

**Separation into the real and imaginary parts
leads to the standard Maxwell equations
As the simplest example of the electromagnetic field
which will be shown to exhibit backflow
I will choose the superposition of two
noncolinear monochromatic plane waves**

**All solutions of Maxwell equations can be generated
from scalar solutions $\chi(\mathbf{r}, t)$ of the wave equation**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} (\partial_t - \partial_z)^2 - (\partial_x + i\partial_y)^2 \\ i(\partial_t - \partial_z)^2 + i(\partial_x + i\partial_y)^2 \\ 2(\partial_t - \partial_z)(\partial_x + i\partial_y) \end{bmatrix} \chi(\mathbf{r}, t)$$

**The plane-wave solution of Maxwell equations
is obtained by choosing $\chi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kt)}$**

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\phi_k, \theta_k) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kt)}$$

**where $\mathbf{k} = k\{\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta\}$
and the normalized polarization vector $\mathbf{e}(\phi_k, \theta_k)$
is chosen in the following form**

$$\mathbf{e}(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{2i\phi} \sin^2(\theta/2) - \cos^2(\theta/2) \\ -ie^{2i\phi} \sin^2(\theta/2) - i\cos^2(\theta/2) \\ 2e^{i\phi} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

Consider the superposition of two such solutions

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\phi_k, \theta_k) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kt)} + \mathbf{e}(\phi_l, \theta_l) e^{i(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} - lt)}$$

**In order to exhibit the phenomenon of backflow
I will assume that the z components
of both wave vectors k and l are positive $0 < \theta < \pi/2$**

**The following choice of the wave vectors
will produce the maximal backflow effect**

$$k = 1, l = 1, \phi_k = \pi/2, \phi_l = 0, \theta_k = \pi/2, \theta_l = \pi/2$$

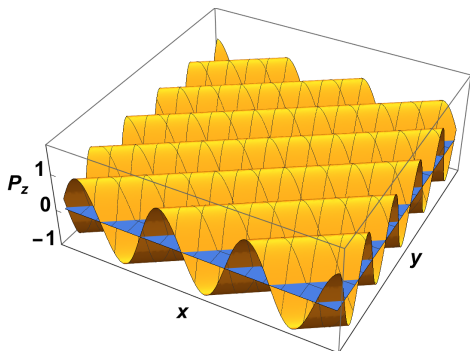
We may now calculate the Poynting vector

$$\mathbf{P} = \frac{c}{2i} \mathbf{F}^* \times \mathbf{F} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

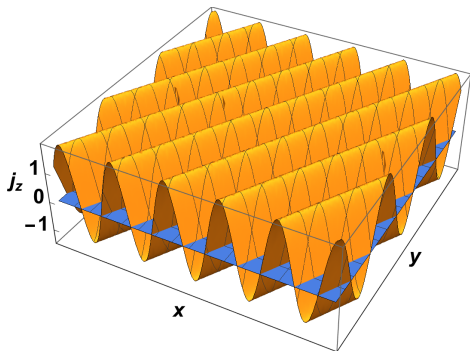
which determines the direction of the energy flow

**The z component of the Poynting vector
for the superposition of two plane waves**

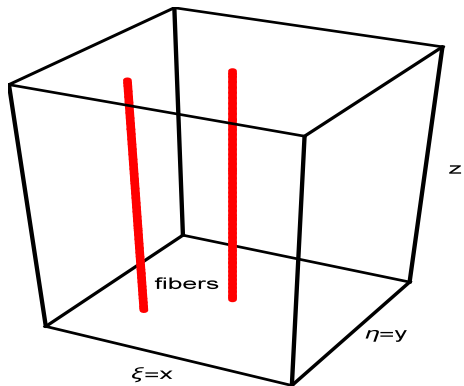
**The $P_z = 0$ plane clearly marks the regions
where P_z has negative values**



I will show now that the same type of backflow can be realized in the case of Dirac wave functions
This time the backflow occurs
in the behavior of the probability current $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
In full analogy with electromagnetism we obtain



Digression on Hopf fibration



Hopf paper

Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.

Von

Heinz Hopf in Zürich.

Einleitung.

Unter einer „Abbildung“ eines Komplexes (oder auch einer beliebigen Menge) A „auf“ einen Komplex B verstehen wir stets eine eindeutige und stetige, nicht notwendig eineindeutige, Abbildung von A , bei der die Menge der Bildpunkte zu B gehört. Zwei Abbildungen von A auf B nennen wir zu derselben „Klasse“ gehörig, wenn man sie stetig ineinander überführen kann, d. h. wenn es eine sie enthaltende stetige Schar von Abbildungen von A auf B gibt, und wir bezeichnen eine Abbildung als „topologisch wesentlich“, wenn bei jeder Abbildung der durch sie bestimmten Klasse die Bildmenge aus allen Punkten von B besteht, d. h. wenn es unmöglich ist, durch stetige Abänderung der Abbildung einen Punkt von B von der Bedeckung durch die Bildmenge zu befreien.

Das Hauptziel und -ergebnis dieser Arbeit ist der Beweis von

Satz I. *Die Abbildungen der 3-dimensionalen Sphäre S^3 auf die 2-dimensionale Sphäre S^2 bilden unendlich viele Klassen.*

Hopf fibration

§ 5.

Eine Abbildung der S^3 auf die S^2 mit $\gamma = 1$.

Der euklidische R^4 mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 sei auf den euklidischen R^3 mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 folgendermaßen abgebildet:

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= 2(x_1 x_3 + x_2 x_4), & \xi_2 &= 2(x_2 x_3 - x_1 x_4), \\ \xi_3 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2) \cdot (x_3^2 + x_4^2),$$

also

$$(2) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2;$$

die dreidimensionale Kugel mit dem Radius r um den Nullpunkt R^4 als Mittelpunkt wird somit auf die zweidimensionale Kugel mit dem Radius r^2 um den Nullpunkt des R^3 als Mittelpunkt abgebildet; insbesondere ist die Einheitskugel S^3 des R^4 das Bild der Einheitskugel S^2 des R^3 . Diese Abbildung f der S^3 auf die S^2 wollen wir betrachten¹²⁾.

Look at the bottom lines

Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. 665

Liegt nun eine Abbildung von A^4 auf eine S^2 vor, so können wir diese S^2 durch die eben beschriebene A^2 realisieren; die Abbildung ist dann eine Abbildung von A^4 auf sich, die den Grad 0 hat, da nur ein echter Teil von A^4 durch die Bildmenge bedeckt wird. Folglich ist nach dem eben genannten Satz auch $u = 0$, also $f(A^2) \sim 0$ in A^4 , d. h. $f(A^2) = 0$ auf S^2 . Ist Z^2 irgendein Zyklus von A^4 , so ist $Z^2 \sim a \cdot A^2$, mithin $f(Z^2) = a \cdot f(A^2) = 0$ auf S^2 , d. h. f ist algebraisch unwesentlich.

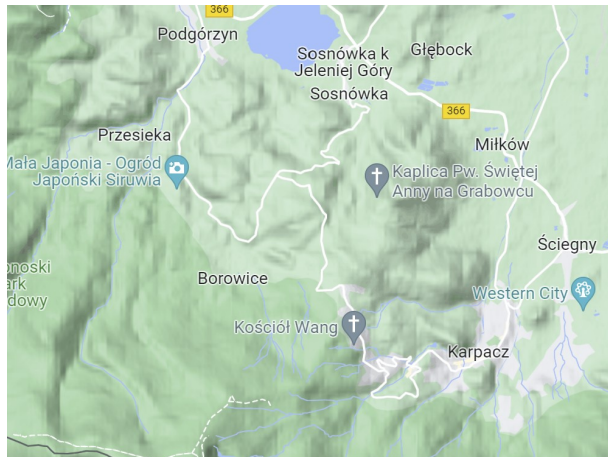
8. Schließlich sei für den Satz Ia noch ein Beweis angegeben, der auf den Sätzen VII und VIII beruht und von dem in den §§ 1 bis 5 enthaltenen Beweis völlig verschieden ist: A^4 und A^2 haben dieselben Bedeutungen wie in 7., A^3 bezeichne den Komplex der dreidimensionalen Simplexe T_j^3 einer bestimmten Zerlegung von A^4 ; dann kann man A^2 als in A^3 liegend annehmen, und dort ist A^2 erst recht ≈ 0 . Daher kann man nach dem Zusatz zu Satz VII A^2 so auf die S^2 abbilden, daß dabei A^2 algebraisch wesentlich abgebildet wird. Diese Abbildung f läßt sich auf Grund von Satz VIII aber nicht zu einer Abbildung $f(A^4)$ erweitern. Folglich gibt es unter den vierdimensionalen Simplexen T_i^4 von A^4 wenigstens eines, etwa T_1^4 , so daß sich die auf dem Rand $T_1^4 = S_1^3$ erklärte Abbildung f nicht auf ganz T_1^4 ausdehnen läßt; daraus folgt, daß die Abbildung $f(S_1^3)$ auf die S^2 topologisch wesentlich ist, da andernfalls die Ausdehnung von f auf T_1^4 nach dem im Beweise von Satz VII angewandten Verfahren vorgenommen werden könnte. Damit ist ein indirekter Beweis des Satzes Ia geliefert.

Hain im Riesengebirge, September 1930.

This is Hain



Where is Hain?



Hopf fibration by Niles Johnson

Ohio State University

<http://nilesjohnson.net>



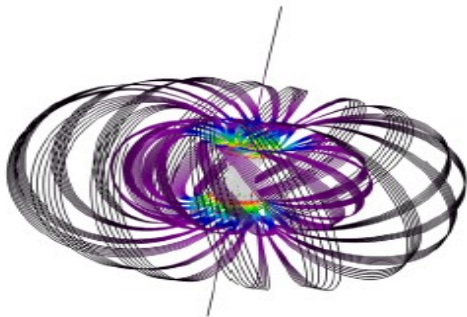
Hopfion solution of Maxwell equations

**To illustrate the backflow in a more elaborate case
I have chosen here my favorite solution
of the Maxwell equations: the hopfion**

**This solution was discovered by Synge and later
Rañada found its remarkable topological properties
closely related to the famous Hopf fibration**

**The lines of electric field magnetic field
and the Poynting vector form linked loops**

Lines of magnetic field in a Hopfion have the shapes as in Hopf fibration



Arrayas and Trueba J.Math.Phys. **50** 085293 (2017)

The Maxwell Hopfion

The Hopfion solution is obtained by differentiation from the following function

$$\chi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3k}{k} e^{-(a+it)k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{x^2 + y^2 + c^2(a+it)^2}$$

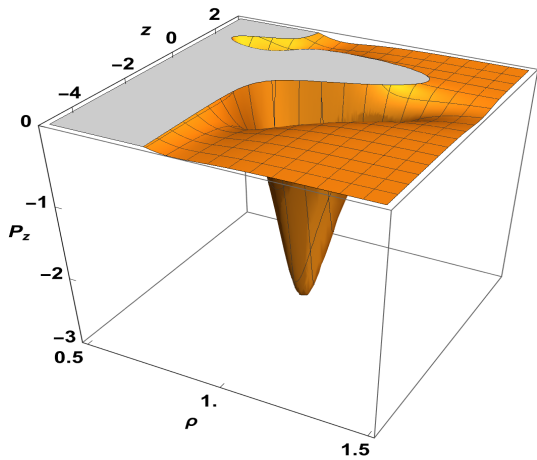
The parameter a defines the size of the wave-packet

The integral over \vec{k} can be evaluated even when the integration is restricted only to $k_z > 0$

$$\begin{aligned} \chi_{\text{BF}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3k}{k} \theta(k_z) e^{-(a+it)k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+c^2(a+it)^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+c^2(a+it)^2-iz}} \end{aligned}$$

We may now differentiate this function to obtain F and to exhibit the backflow

Backflow in the Hopfion



Conclusions

**The phenomenon of backflow
is not a quantum effect!**

**It is found in the solutions of various wave equations
In particular in the Maxwell equations
the Planck constant does not appear
and yet the backflow is clearly seen**

The only requirements for backflow are:

- 1 The existence of the Fourier representation**
- 2 The existence of a flow vector like for example
the probability current or the Poynting vector**